

Systems Biology: Theoretical Biology



Levien van Zon, Theoretical Biology, UU

Stappenplan breukfuncties

Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld: $\frac{caR^2}{hd\alpha R} \frac{caR}{hd\alpha}$ vs. $\frac{caR}{h+d\alpha R} \frac{ca}{\frac{h}{R}+d\alpha}$
- Zo ja, **horizontale asymptoot zoeken**:
 - Maak variabele heel groot.
 - Waar gaat de **hele functie** heen? Voorbeeld: $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{d}$
 - Als variabele voorkomt in teller én noemer, deel alle termen van de breuk door hoogste macht van de variabele.
- **Verticale asymptoot**:
 - Stel gedeelte onder de breukstreep gelijk aan nul, los op.
 - Als er waarden van de variabele zijn waarbij de noemer van de breuk nul is, zit daar een asymptoot.
- Eventueel snijpunt y -as berekenen (stel x -variabele gelijk aan nul).
- Eventueel snijpunt x -as berekenen.

Voorbeelden: $\frac{a}{h+x}$, $\frac{ax}{h+x}$, $\frac{a+x}{bx}$, $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen \rightarrow nulclines
 - Check of variabele voorkomt in alle termen van vergelijking.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
 - Markeer alle oplossingen met kleur die hoort bij vergelijking!
 - Los deel tussen de haakjes op:
 - Maak de y -variabele vrij, indien mogelijk.
 - Indien niet mogelijk, dan $x = \dots \rightarrow$ verticale lijn.
 - **Alle** oplossingen vinden, en markeren in kleur!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!
 - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes? → Lineair!
- Gaat hij omhoog of naar beneden?
- Breukfunctie? Asymptoten vinden!
- Eventueel snijpunten bepalen.
- Functie tekenen, in bijbehorende kleur!
- Doe dit voor **alle** nulclines!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.
- Anders:
 - Grote waarde voor x of y of beiden.
 - Of punt op de x of y -as (let op nulclines).
- Horizontale en verticale vectoren tekenen, in juiste kleur!
- Vectoren omklappen aan andere kant van nulcline met dezelfde kleur.
- Controleer of vectorveld consistent is.
- Teken ook vectoren op nulclines (altijd horizontaal of verticaal).

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (4)

Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.
- Markeer **alle** snijpunten van twee **verschillende** nulclines.
- Wijzen alle vectoren rondom snijpunt richting het evenwicht?
→ stabiel
- Wijzen vectoren in één of meer richtingen van het evenwicht af?
→ instabiel
- Soms kun je het niet zien (roterend vectorveld, horizontale of verticale nulcline).
- In dat geval: grafische Jacobiaan bepalen → stabiel, instabiel, zadelpunt

Stap 5: Vraag beantwoorden

Let op:

- Wat is de betekenis van de variabelen?
- Hoe verschuiven nulclines als parameters veranderen?
- Wat gebeurt er dan met evenwichten en stabiliteit?
- Let vooral op *niet-triviale* evenwichten.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
 - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
- **Alle** oplossingen vinden (voor vergelijking A), en één voor één **invullen** in de andere vergelijking (B).
- Als er in de oplossing uit vergelijking A nog variabelen staan, dan de bijbehorende oplossing van vergelijking B terug invullen in vergelijking A.
- Twee bijbehorende oplossingen vormen samen de locatie van een evenwicht.
- Controleer aan de hand van je faseportret of je alle oplossingen

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (6)

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.
 - Beide differentiaalvergelijkingen afleiden naar de x - en naar de y -variabele.
- Voor ieder evenwicht, vul de x - en y -waardes in, in de algemene Jacobiaanse matrix.
 - Geeft de matrix voor het evenwicht.
 - Bepaal type evenwicht aan de hand van trace/determinant of eigenwaarden.
- Controleer of resultaat overeen komt met vectorveld!

Stap 8: Schets trajectories en/of timeplot

- Alleen indien nodig.
- **Trajectory:** Kies beginpunt(en), volg de pijlen richting attractor.
- **Timeplot:** volg trajectory, teken de waardes van de x - en y -variabelen apart over de tijd.

Verdere Planning

- Morgen: College prof. Paulien Hogeweg (ook tentamenstof!)
- Morgen en donderdag: Computerpracticum spatial models. En afmaken opgaven, vragen stellen, oefententamens.
- Donderdag: Géén college, wel vragen-uren 13.00-15.00 en nabespreken GRIND. Niet verplicht.
- Dinsdag 18 maart: Tentamen, 13.30, Educatorium Gamma. Herkansingstoets Wiskunde aansluitend, om 16:30. Geen GR of telefoon, gewone rekenmachine mag wel.
- Donderdag 20 maart: Bioinformatica