



Levien van Zon, Theoretical Biology, UU

## Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld:  $\frac{caR^2}{hd\alpha R} \frac{caR}{hd\alpha}$  vs.  $\frac{caR}{h+d\alpha R} \frac{ca}{\frac{ca}{h+d\alpha}}$
- Zo ja, **horizontale asymptoot zoeken**:
  - Maak variabele heel groot.
  - Waar gaat de **hele functie** heen? Voorbeeld:  $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{d}$
  - Als variabele voorkomt in teller én noemer, deel alle termen van de breuk door hoogste macht van de variabele.
- **Verticale asymptoot**:
  - Stel gedeelte onder de breukstreep gelijk aan nul, los op.
  - Als er waarden van de variabele zijn waarbij de noemer van de breuk nul is, zit daar een asymptoot.
- Eventueel snijpunt y-as berekenen (stel x-variabele gelijk aan nul).
- Eventueel snijpunt x-as berekenen.

Voorbeelden:  $\frac{a}{h+x}$ ,  $\frac{ax}{h+x}$ ,  $\frac{a+x}{bx}$ ,  $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

## Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

## Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen  $\frac{dx}{dt}$  en  $\frac{dy}{dt}$  op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv.  $x$  en  $y$ ) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.  
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking  $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen  $\rightarrow$  nulclines
  - Check of variabele voorkomt in alle termen van vergelijking.
  - Zo ja, haal buiten haakjes  $\rightarrow x = 0$  of  $y = 0$  oplossing, meteen opschrijven!
  - Markeer alle oplossingen met kleur die hoort bij vergelijking!
  - Los deel tussen de haakjes op:
    - Maak de  $y$ -variabele vrij, indien mogelijk.
    - Indien niet mogelijk, dan  $x = \dots \rightarrow$  verticale lijn.
  - **Alle** oplossingen vinden, en markeren in kleur!

## Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

## Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
  - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3<sup>e</sup> graadsfuncties, rechte lijnen.
  - Kijk naar  $x$ -variabele!
    - 1 Onder breukstreep\*?  $\rightarrow$  Breukfunctie
    - 2 Hogere macht?  $\rightarrow$  Parabool of 3<sup>e</sup> graadsfunctie
    - 3 Wortels?  $\rightarrow$  Vervissel de assen!
    - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes?  $\rightarrow$  Lineair!
- Gaat hij omhoog of naar beneden?
- Breukfunctie? Asymptoten vinden!
- Eventueel snijpunten bepalen.
- Functie tekenen, in bijbehorende kleur!
- Doe dit voor **alle** nulclines!

## Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

## Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de  $x$  en  $y$ -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters?  $\rightarrow$  Punt invullen.
- Anders:
  - Grote waarde voor  $x$  of  $y$  of beiden.
  - Of punt op de  $x$  of  $y$ -as (let op nulclines).
- Horizontale en verticale vectoren tekenen, in juiste kleur!
- Vectoren omlappen aan andere kant van nulcline met dezelfde kleur.
- Controleer of vectorveld consistent is.
- Teken ook vectoren op nulclines (altijd horizontaal of verticaal).

## Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (4)

## Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.
- Markeer **alle** snijpunten van twee **verschillende** nulclines.
- Wijzen alle vectoren rondom snijpunt richting het evenwicht?  $\rightarrow$  stabiel
- Wijzen vectoren in één of meer richtingen van het evenwicht af?  $\rightarrow$  instabiel
- Soms kun je het niet zien (roterend vectorveld, horizontale of verticale nulcline).
- In dat geval: grafische Jacobiaan bepalen  $\rightarrow$  stabiel, instabiel, zadelpunt

## Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (4)

## Stap 5: Vraag beantwoorden

Let op:

- Wat is de betekenis van de variabelen?
- Hoe verschuiven nulclines als parameters veranderen?
- Wat gebeurt er dan met evenwichten en stabiliteit?
- Let vooral op *niet-triviale* evenwichten.

## Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

## Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen  $\frac{dx}{dt}$  en  $\frac{dy}{dt}$  op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
  - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.
  - Zo ja, haal buiten haakjes  $\rightarrow x = 0$  of  $y = 0$  oplossing, meteen opschrijven!
- **Alle** oplossingen vinden (voor vergelijking A), en één voor één **invullen** in de andere vergelijking (B).
- Als er in de oplossing uit vergelijking A nog variabelen staan, dan de bijbehorende oplossing van vergelijking B terug invullen in vergelijking A.
- Twee bijbehorende oplossingen vormen samen de locatie van een evenwicht.
- Controleer aan de hand van je faseportret of je alle oplossingen

### Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.
  - Beide differentiaalvergelijkingen afleiden naar de  $x$ - en naar de  $y$ -variabele.
- Voor ieder evenwicht, vul de  $x$ - en  $y$ -waardes in, in de algemene Jacobiaanse matrix.
  - Geeft de matrix voor het evenwicht.
  - Bepaal type evenwicht aan de hand van trace/determinant of eigenwaarden.
- Controleer of resultaat overeen komt met vectorveld!

### Stap 8: Schets trajectories en/of timeplot

- Alleen indien nodig.
- **Trajectory:** Kies beginpunt(en), volg de pijlen richting attractor.
- **Timeplot:** volg trajectory, teken de waardes van de  $x$ - en  $y$ -variabelen apart over de tijd.

## Verdere Planning

- Morgen: College prof. Paulien Hogeweg (ook tentamenstof!)
- Morgen en donderdag: Computerpracticum spatial models. En afmaken opgaven, vragen stellen, oefententamens.
- Donderdag: Géén college, wel vragen-uren 13.00-15.00 en nabespreken GRIND. Niet verplicht.
- Dinsdag 18 maart: Tentamen, 13.30, Educatorium Gamma. Herkansingstoets Wiskunde aansluitend, om 16:30. Geen GR of telefoon, gewone rekenmachine mag wel.
- Donderdag 20 maart: Bioinformatica