



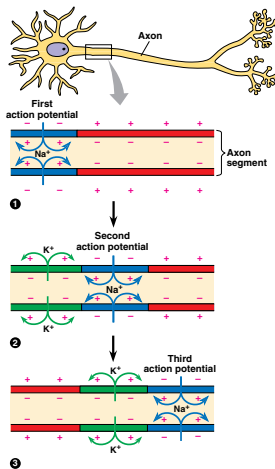
Levien van Zon, Theoretical Biology, UU

Excitable Media

- Excitable media
 - Action potential propagation.
 - Waves in 1D and 2D.
 - Spiral waves and turbulence.
 - Waves and cardiac arrhythmias.
 - Waves and slime moulds.

Excitable media

A neuron is an example of an **excitable medium**.



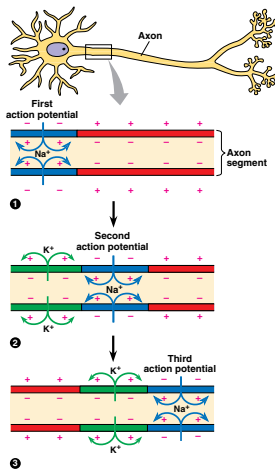
Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.



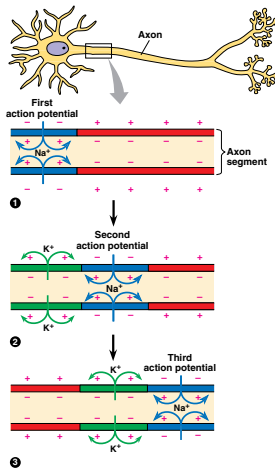
Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.
- An all-or-none response.



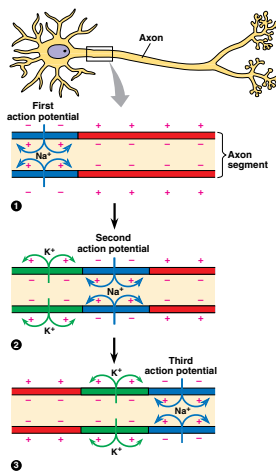
Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.
- An all-or-none response.
- Refractoriness.



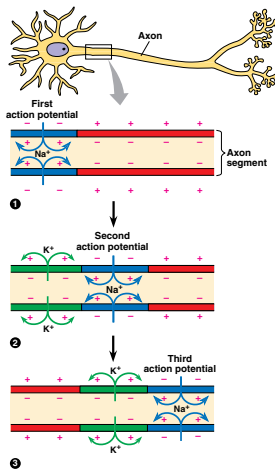
Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.
- An all-or-none response.
- Refractoriness.
- **Wave propagation.**



Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

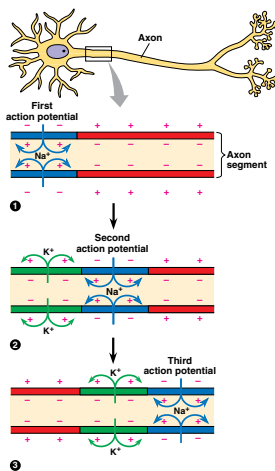
A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.
- An all-or-none response.
- Refractoriness.
- **Wave propagation.**

How wave propagation works:

- 1 Activations spreads *passively* to a nearby spot.



Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

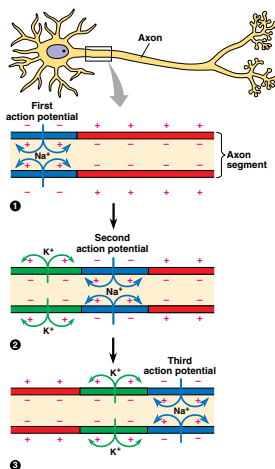
A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.
- An all-or-none response.
- Refractoriness.
- **Wave propagation.**

How wave propagation works:

- 1 Activations spreads *passively* to a nearby spot.
- 2 The threshold at this spot is exceeded.



Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

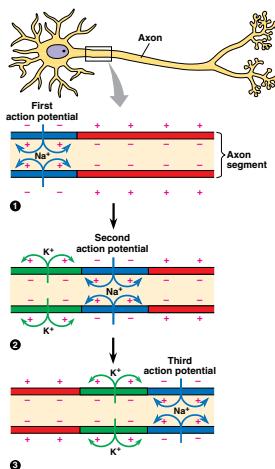
A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.
- An all-or-none response.
- Refractoriness.
- **Wave propagation.**

How wave propagation works:

- 1 Activations spreads *passively* to a nearby spot.
- 2 The threshold at this spot is exceeded.
- 3 A new *active* response is generated.



Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Excitable media

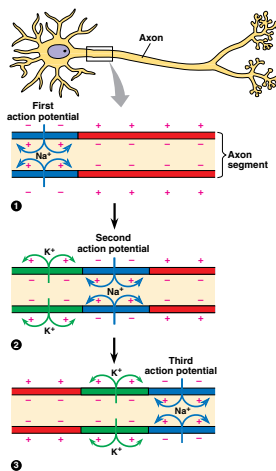
A neuron is an example of an **excitable medium**.

General excitable medium properties:

- An activation threshold.
- An all-or-none response.
- Refractoriness.
- **Wave propagation.**

How wave propagation works:

- 1 Activations spreads *passively* to a nearby spot.
- 2 The threshold at this spot is exceeded.
- 3 A new *active* response is generated.
- 4 Refractoriness prevents a backwards wave.



Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Modeling wave propagation in an excitable medium

We can use the Fitzhugh-Nagumo model with diffusion:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V(V - a)(V - 1) - W + D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = c(V - bW)$$

http://www.scholarpedia.org/article/FitzHugh-Nagumo_model

Modeling wave propagation in an excitable medium

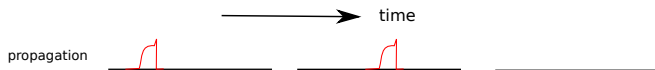
We can use the Fitzhugh-Nagumo model with diffusion:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= -V(V - a)(V - 1) - W + D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= c(V - bW)\end{aligned}$$

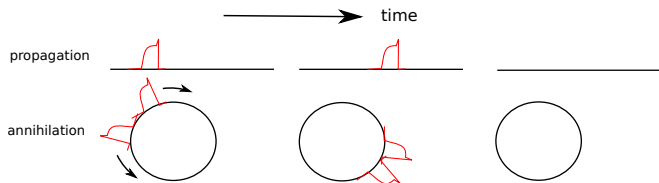
- The wave-front *activates* points in front.
- The wave-tail is *refractory*.

http://www.scholarpedia.org/article/FitzHugh-Nagumo_model

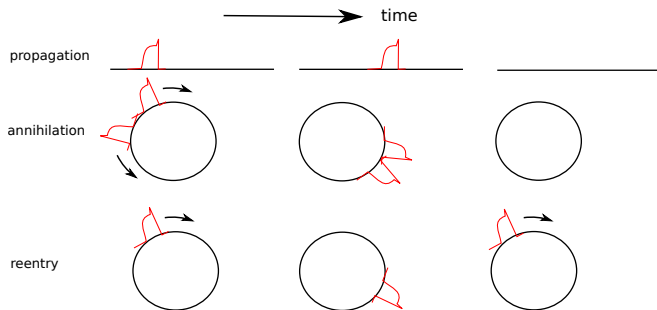
Wave propagation in 1D



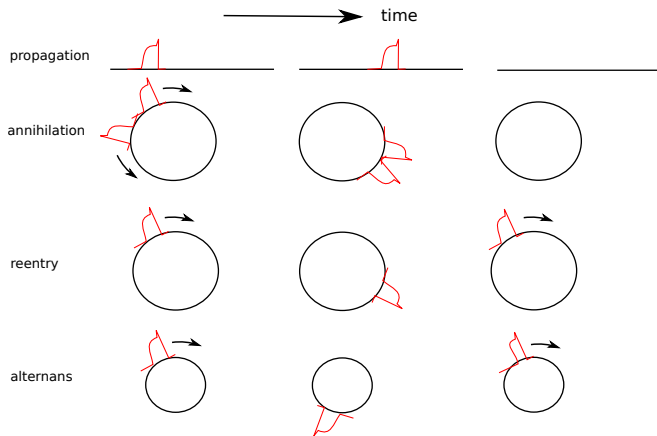
Wave propagation in 1D



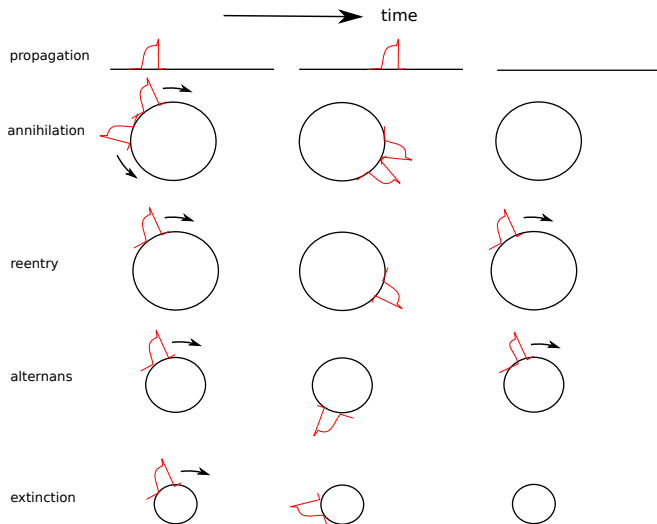
Wave propagation in 1D



Wave propagation in 1D

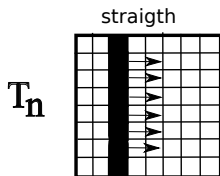


Wave propagation in 1D



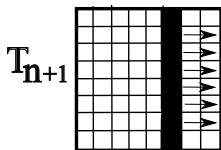
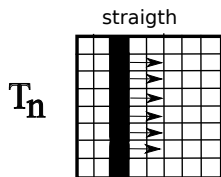
Wave propagation in 2D, curvature effects

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V(V - a)(V - 1) - W + D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = c(V - bW)$$



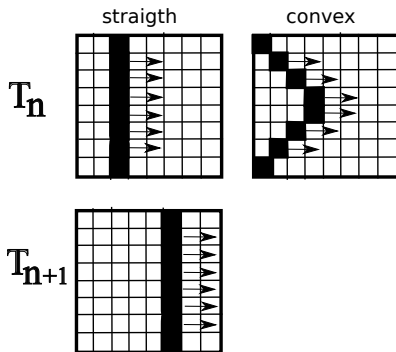
Wave propagation in 2D, curvature effects

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V(V - a)(V - 1) - W + D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = c(V - bW)$$



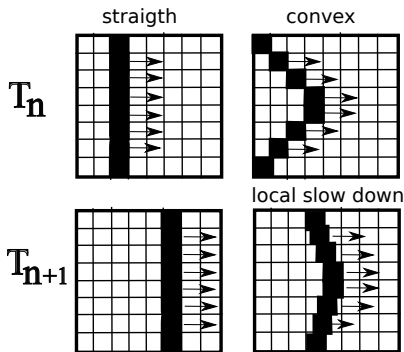
Wave propagation in 2D, curvature effects

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V(V - a)(V - 1) - W + D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = c(V - bW)$$



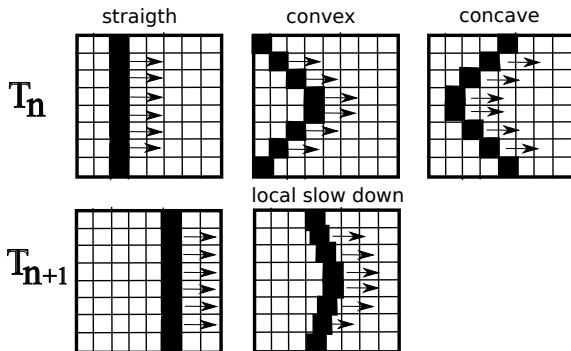
Wave propagation in 2D, curvature effects

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V(V - a)(V - 1) - W + D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = c(V - bW)$$



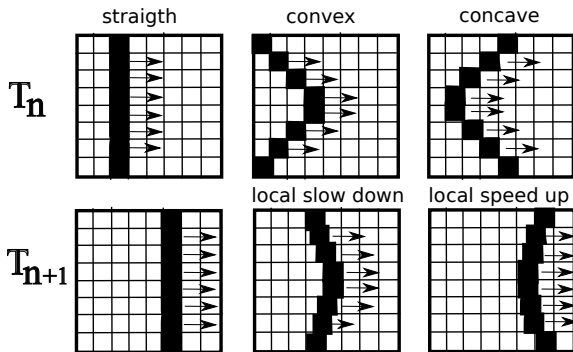
Wave propagation in 2D, curvature effects

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V(V - a)(V - 1) - W + D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = c(V - bW)$$

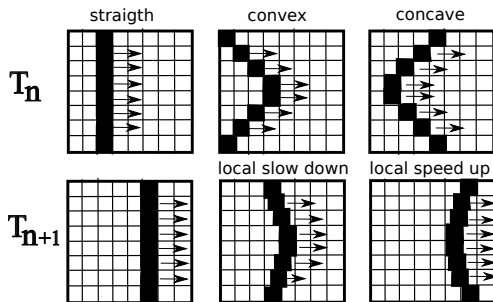


Wave propagation in 2D, curvature effects

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V(V - a)(V - 1) - W + D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = c(V - bW)$$

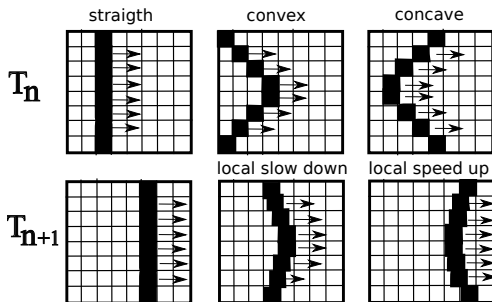


Curvature effects



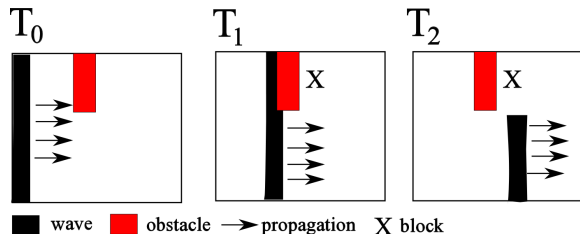
Curvature affects the *local propagation speed* of waves.
The net effect is the *straightening* of wavefronts.

Curvature effects



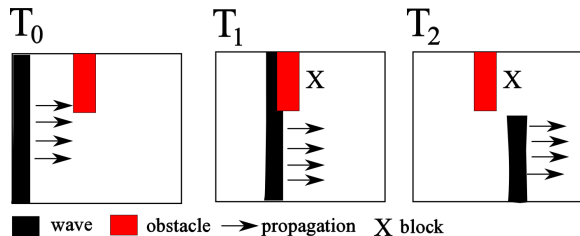
Curvature affects the *local propagation speed* of waves.
The net effect is the *straightening* of wavefronts.

Wave propagation in 2D: Wave break and free ends



The presence of an **inexcitable obstacle** or a **refractory region** will cause a wave to break and produce a free wave end.

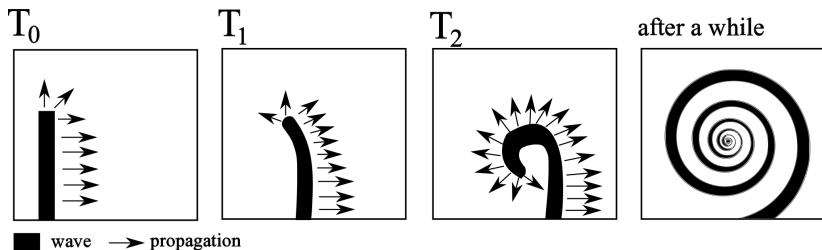
Wave propagation in 2D: Wave break and free ends



The presence of an **inexcitable obstacle** or a **refractory region** will cause a wave to break and produce a free wave end.

Wave propagation in 2D: Spiral Formation

So what happens if we have a free wave end?



Curvature at the free wave-end locally slows propagation. This causes the wave to **curl back**, which in turn results in **spiral wave formation**.

Note the direction of curling and wave propagation!

Wave propagation in 2D: waves, spirals and turbulence

target waves

wave propagation

Planar waves: single trigger produces a single wave, which **terminates**.

Wave propagation in 2D: waves, spirals and turbulence

target waves

wave propagation

Planar waves: single trigger produces a single wave, which **terminates**.

Wave propagation in 2D: waves, spirals and turbulence

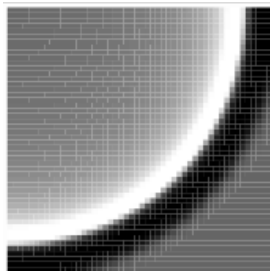
target waves

wave propagation

Planar waves: single trigger produces a single wave, which **terminates**.

Wave propagation in 2D: waves, spirals and turbulence

target waves

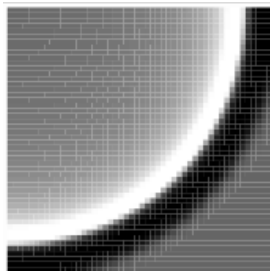


wave propagation

Planar waves: single trigger produces a single wave, which **terminates**.

Wave propagation in 2D: waves, spirals and turbulence

target waves



wave propagation

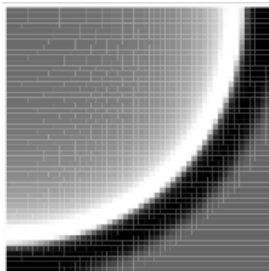
spiral waves

wave reentry

Planar waves: single trigger produces a single wave, which **terminates**.

Wave propagation in 2D: waves, spirals and turbulence

target waves



wave propagation

spiral waves



wave reentry

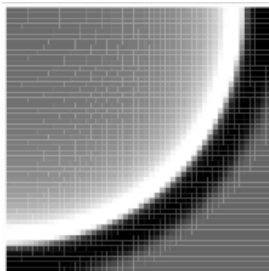
turbulence

wave alternans

Planar waves: single trigger produces a single wave, which **terminates**.

Wave propagation in 2D: waves, spirals and turbulence

target waves



wave propagation

spiral waves



wave reentry

turbulence



wave alternans

Planar waves: single trigger produces a single wave, which **terminates**.
Spirals & turbulence: re-entry allows for re-excitation, **perpetual** pattern.

Other ways to model excitable media

A CA model can also be used to model an excitable medium.

Other ways to model excitable media

A CA model can also be used to model an excitable medium.

Rules:

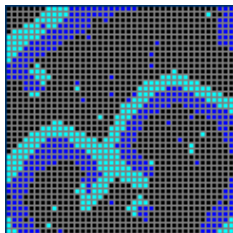
- 1 Excite if 3 or more excited neighbours.
- 2 Remain excited for 5 timesteps.
- 3 Become refractory for 3 timesteps.

variable states

- 0 rest
- 1 excited
- 2 refractory

update rules

input ind. state	duration own state neighbor states	output new ind. state
0	3 or more 1's	1
0	less than 3 1's	0
1	5 steps	2
1	less than 5 steps	1
2	4 steps	0
2	less than 4 steps	2



From: <http://www.cnd.mcgill.ca/bios/bub/CAs.html>

Other ways to model excitable media

A CA model can also be used to model an excitable medium.

Rules:

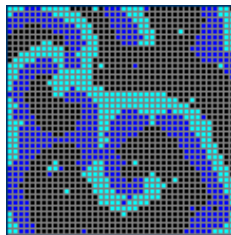
- 1 Excite if 3 or more excited neighbours.
- 2 Remain excited for 5 timesteps.
- 3 Become refractory for 3 timesteps.

variable states

- 0 rest
- 1 excited
- 2 refractory

update rules

input ind. state	duration own state neighbor states	output new ind. state
0	3 or more 1's	1
0	less than 3 1's	0
1	5 steps	2
1	less than 5 steps	1
2	4 steps	0
2	less than 4 steps	2



From: <http://www.cnd.mcgill.ca/bios/bub/CAs.html>

Other ways to model excitable media

A CA model can also be used to model an excitable medium.

Rules:

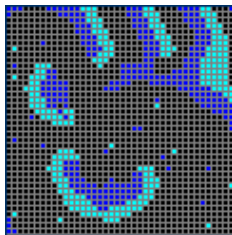
- 1 Excite if 3 or more excited neighbours.
- 2 Remain excited for 5 timesteps.
- 3 Become refractory for 3 timesteps.

variable states

- 0 rest
- 1 excited
- 2 refractory

update rules

input ind. state	duration own state neighbor states	output new ind. state
0	3 or more 1's	1
0	less than 3 1's	0
1	5 steps	2
1	less than 5 steps	1
2	4 steps	0
2	less than 4 steps	2



From: <http://www.cnd.mcgill.ca/bios/bub/CAs.html>

Other ways to model excitable media

A CA model can also be used to model an excitable medium.

Rules:

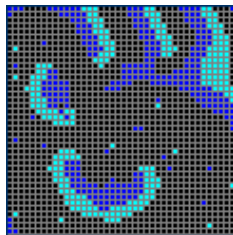
- 1 Excite if 3 or more excited neighbours.
- 2 Remain excited for 5 timesteps.
- 3 Become refractory for 3 timesteps.

variable states

- 0 rest
- 1 excited
- 2 refractory

update rules

input ind. state	duration own state neighbor states	output new ind. state
0	3 or more 1's	1
0	less than 3 1's	0
1	5 steps	2
1	less than 5 steps	1
2	4 steps	0
2	less than 4 steps	2

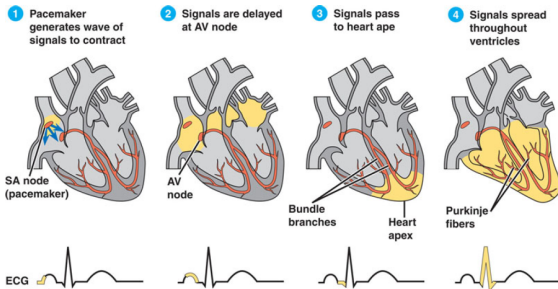


From: <http://www.cnd.mcgill.ca/bios/bub/CAs.html>

Cardiac tissue

The heart is an **electro-mechanical** pump:

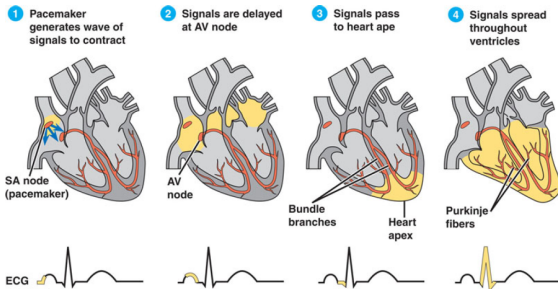
- Cells **generate** and **conduct** action potentials.
- Cells **contract** in response to action potentials.



Cardiac tissue

The heart is an **electro-mechanical** pump:

- Cells **generate** and **conduct** action potentials.
- Cells **contract** in response to action potentials.



Fast wave propagation ensures timed, coordinated contraction

Cardiac arrhythmias

Arrhythmias

Abnormalities in *rate* and/or *coordination* of cardiac contraction, caused by abnormality of the **excitation wave**.

Cardiac arrhythmias

Arrhythmias

Abnormalities in *rate* and/or *coordination* of cardiac contraction, caused by abnormality of the **excitation wave**.

normal sinus rhythm



Cardiac arrhythmias

Arrhythmias

Abnormalities in *rate* and/or *coordination* of cardiac contraction, caused by abnormality of the **excitation wave**.

normal sinus rhythm



ventricular tachycardia



Cardiac arrhythmias

Arrhythmias

Abnormalities in *rate* and/or *coordination* of cardiac contraction, caused by abnormality of the **excitation wave**.

normal sinus rhythm



ventricular tachycardia



Tachycardia is an increased contraction rate, which leads to incomplete filling with blood and less efficient pumping.

Cardiac arrhythmias

Arrhythmias

Abnormalities in *rate* and/or *coordination* of cardiac contraction, caused by abnormality of the **excitation wave**.

normal sinus rhythm



ventricular tachycardia



ventricular fibrillation



Tachycardia is an increased contraction rate, which leads to incomplete filling with blood and less efficient pumping.

Cardiac arrhythmias

Arrhythmias

Abnormalities in *rate* and/or *coordination* of cardiac contraction, caused by abnormality of the **excitation wave**.

normal sinus rhythm



ventricular tachycardia



ventricular fibrillation



Tachycardia is an increased contraction rate, which leads to incomplete filling with blood and less efficient pumping.

Fibrillation is an increased rate without coordination, and with hardly any pumping. It is lethal within minutes.

Cardiac arrhythmias

Arrhythmias

Abnormalities in *rate* and/or *coordination* of cardiac contraction, caused by abnormality of the **excitation wave**.

normal sinus rhythm



ventricular tachycardia



ventricular fibrillation



Tachycardia is an increased contraction rate, which leads to incomplete filling with blood and less efficient pumping.

Fibrillation is an increased rate without coordination, and with hardly any pumping. It is lethal within minutes.

What is the cause of these abnormalities?

Cardiac arrhythmias

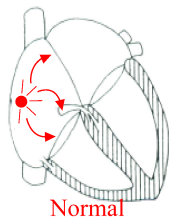
Hypothesis

Ventricular tachycardia and fibrillation could be caused by **spiral waves** and **turbulence** (broken spirals).

Cardiac arrhythmias

Hypothesis

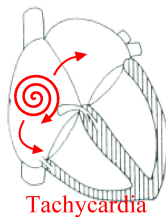
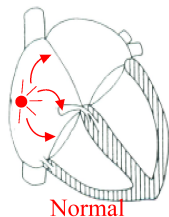
Ventricular tachycardia and fibrillation could be caused by **spiral waves** and **turbulence** (broken spirals).



Cardiac arrhythmias

Hypothesis

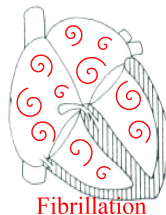
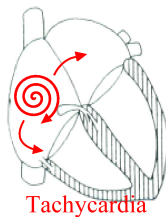
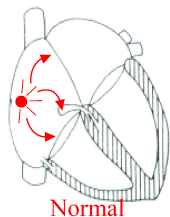
Ventricular tachycardia and fibrillation could be caused by **spiral waves** and **turbulence** (broken spirals).



Cardiac arrhythmias

Hypothesis

Ventricular tachycardia and fibrillation could be caused by **spiral waves** and **turbulence** (broken spirals).



Experimental proof of hypotheses

Curing Fibrillation?

We can use our knowledge about excitable media to:

- invent new cures
- understand existing ones

We will examine this in the exercises.

Dictyostelium discoïdum

The heart is not the only excitable medium.

Dictyostelium discoideum

The heart is not the only excitable medium.

The slime mould *Dictyostelium discoideum* is a species of amoeba.

Dictyostelium discoideum

The heart is not the only excitable medium.

The slime mould *Dictyostelium discoideum* is a species of amoeba. Individual cells can communicate using **cyclic-AMP**.

Dictyostelium discoideum

The heart is not the only excitable medium.

The slime mould *Dictyostelium discoideum* is a species of amoeba. Individual cells can communicate using **cyclic-AMP**.

Cellular signalling system:

Dictyostelium discoïdum

The heart is not the only excitable medium.

The slime mould *Dictyostelium discoïdum* is a species of amoeba. Individual cells can communicate using **cyclic-AMP**.

Cellular signalling system:

- c-AMP is produced by cells in response to stress.

Dictyostelium discooidum

The heart is not the only excitable medium.

The slime mould *Dictyostelium discooidum* is a species of amoeba. Individual cells can communicate using **cyclic-AMP**.

Cellular signalling system:

- c-AMP is produced by cells in response to stress.
- c-AMP acts as a chemo-attractant for other cells.

Dictyostelium discoideum

The heart is not the only excitable medium.

The slime mould *Dictyostelium discoideum* is a species of amoeba. Individual cells can communicate using **cyclic-AMP**.

Cellular signalling system:

- c-AMP is produced by cells in response to stress.
- c-AMP acts as a chemo-attractant for other cells.
- c-AMP makes cells produce more c-AMP.

Dictyostelium discoideum

The heart is not the only excitable medium.

The slime mould *Dictyostelium discoideum* is a species of amoeba. Individual cells can communicate using **cyclic-AMP**.

Cellular signalling system:

- c-AMP is produced by cells in response to stress.
- c-AMP acts as a chemo-attractant for other cells.
- c-AMP makes cells produce more c-AMP.
- c-AMP production becomes refractory.

Dictyostelium discoïdum

The heart is not the only excitable medium.

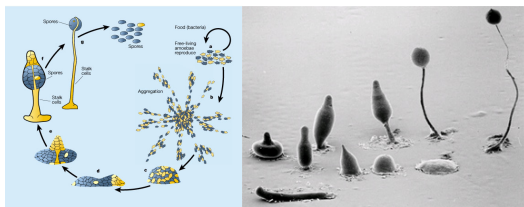
The slime mould *Dictyostelium discoïdum* is a species of amoeba. Individual cells can communicate using **cyclic-AMP**.

Cellular signalling system:

- c-AMP is produced by cells in response to stress.
- c-AMP acts as a chemo-attractant for other cells.
- c-AMP makes cells produce more c-AMP.
- c-AMP production becomes refractory.

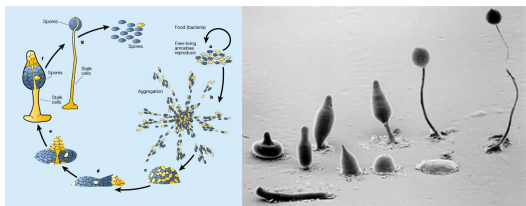
There is positive feedback and refractoriness, which suggests that a group of *Dictyostelium* cells can also act as an excitable medium!

Modelling Dictyostelium discoideum



How does cAMP cause otherwise free-living cells to form a “super-organism”?

Modelling *Dictyostelium discoideum*

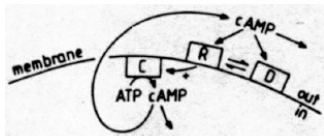
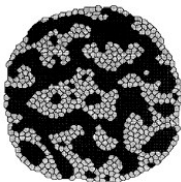
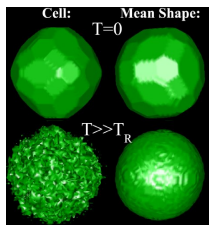
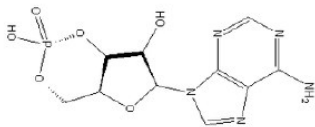
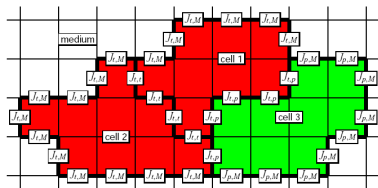


How does cAMP cause otherwise free-living cells to form a “super-organism”?

To understand this, a 3D spatial model of *Dictyostelium discoideum* was created by Stan Mareé, Paulien Hogeweg, and Nick Savill.

Modelling an Organism

Stan Mareé, Paulien Hogeweg, and Nick Savill

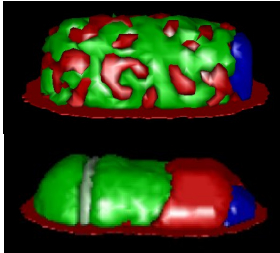
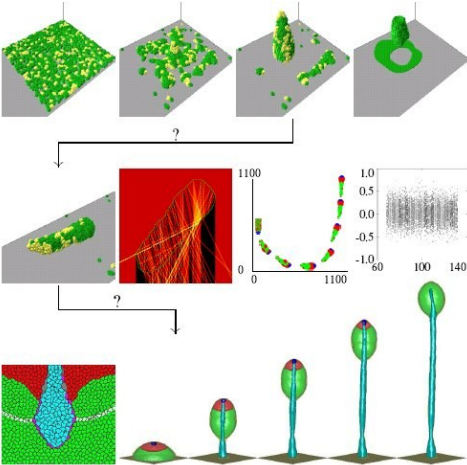


$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_c \Delta c - f(c, a_r, \dots) - r \quad ,$$
$$\frac{\partial r}{\partial t} = \varepsilon(c)(kc - r) \quad .$$

Dictyostelium discoïdum

Modelling an Organism

Stan Mareé, Paulien Hogeweg, and Nick Savill



source of cAMP wave

proximal side

slanted wavefront

distal side

- Excitable media
 - Action potential propagation.
 - Waves in 1D and 2D.
 - Spiral waves and turbulence.
 - Waves and cardiac arrhythmias.
 - Waves and slime moulds.

Stappenplan breukfuncties

Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld: $\frac{caR^2}{hd\alpha R}$ vs. $\frac{caR}{h+d\alpha R}$

Voorbeelden: $\frac{a}{h+x}$, $\frac{ax}{h+x}$, $\frac{a+x}{bx}$, $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

Stappenplan breukfuncties

Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld: $\frac{caR}{hd\alpha}$ vs. $\frac{caR}{h+d\alpha R}$
- Zo ja, **horizontale asymptoot zoeken**:
 - Maak variabele heel groot.
 - Waar gaat de **hele functie** heen? Voorbeeld: $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{d}$

Voorbeelden: $\frac{a}{h+x}$, $\frac{ax}{h+x}$, $\frac{a+x}{bx}$, $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

Stappenplan breukfuncties

Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld: $\frac{caR}{hd\alpha}$ vs. $\frac{ca}{\frac{h}{R}+d\alpha}$
- Zo ja, **horizontale asymptoot zoeken**:
 - Maak variabele heel groot.
 - Waar gaat de **hele functie** heen? Voorbeeld: $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{d}$
 - Als variabele voorkomt in teller én noemer, deel alle termen van de breuk door hoogste macht van de variabele.

Voorbeelden: $\frac{a}{h+x}$, $\frac{ax}{h+x}$, $\frac{a+x}{bx}$, $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

Stappenplan breukfuncties

Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld: $\frac{caR^2}{hd\alpha R}$ vs. $\frac{caR}{h+d\alpha R}$
- Zo ja, **horizontale asymptoot zoeken**:
 - Maak variabele heel groot.
 - Waar gaat de **hele functie** heen? Voorbeeld: $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{d}$
 - Als variabele voorkomt in teller én noemer, deel alle termen van de breuk door hoogste macht van de variabele.
- **Verticale asymptoot**:
 - Stel gedeelte onder de breukstreep gelijk aan nul, los op.
 - Als er waarden van de variabele zijn waarbij de noemer van de breuk nul is, zit daar een asymptoot.

Voorbeelden: $\frac{a}{h+x}$, $\frac{ax}{h+x}$, $\frac{a+x}{bx}$, $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

Stappenplan breukfuncties

Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld: $\frac{caR^2}{hd\alpha R}$ vs. $\frac{caR}{h+d\alpha R}$
- Zo ja, **horizontale asymptoot zoeken**:
 - Maak variabele heel groot.
 - Waar gaat de **hele functie** heen? Voorbeeld: $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{d}$
 - Als variabele voorkomt in teller én noemer, deel alle termen van de breuk door hoogste macht van de variabele.
- **Verticale asymptoot**:
 - Stel gedeelte onder de breukstreep gelijk aan nul, los op.
 - Als er waarden van de variabele zijn waarbij de noemer van de breuk nul is, zit daar een asymptoot.
- Eventueel snijpunt y -as berekenen (stel x -variabele gelijk aan nul).

Voorbeelden: $\frac{a}{h+x}$, $\frac{ax}{h+x}$, $\frac{a+x}{bx}$, $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

Stappenplan breukfuncties

Breukfuncties tekenen

- Is het wel echt een breukfunctie? Voorbeeld: $\frac{caR^2}{hd\alpha R}$ vs. $\frac{caR}{h+d\alpha R}$
- Zo ja, **horizontale asymptoot zoeken**:
 - Maak variabele heel groot.
 - Waar gaat de **hele functie** heen? Voorbeeld: $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{d}$
 - Als variabele voorkomt in teller én noemer, deel alle termen van de breuk door hoogste macht van de variabele.
- **Verticale asymptoot**:
 - Stel gedeelte onder de breukstreep gelijk aan nul, los op.
 - Als er waarden van de variabele zijn waarbij de noemer van de breuk nul is, zit daar een asymptoot.
- Eventueel snijpunt y -as berekenen (stel x -variabele gelijk aan nul).
- Eventueel snijpunt x -as berekenen.

Voorbeelden: $\frac{a}{h+x}$, $\frac{ax}{h+x}$, $\frac{a+x}{bx}$, $\frac{ax^2}{h^2+x^2}$

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen \rightarrow nulclines

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen \rightarrow nulclines
 - Check of variabele voorkomt in alle termen van vergelijking.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen \rightarrow nulclines
 - Check of variabele voorkomt in alle termen van vergelijking.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen \rightarrow nulclines
 - Check of variabele voorkomt in alle termen van vergelijking.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
 - Markeer alle oplossingen met kleur die hoort bij vergelijking!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen \rightarrow nulclines
 - Check of variabele voorkomt in alle termen van vergelijking.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
 - Markeer alle oplossingen met kleur die hoort bij vergelijking!
 - Los deel tussen de haakjes op:
 - Maak de y -variabele vrij, indien mogelijk.
 - Indien niet mogelijk, dan $x = \dots \rightarrow$ verticale lijn.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (1)

Stap 1: Nulclines zoeken

- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Wat zijn variabelen? (bv. x en y) Wat zijn parameters? (de rest)
- Kies assen.
Makkelijkst vrij te maken uit moeilijkste vergelijking $\rightarrow y$ -as!
- Teken assen en geef variabelen aan. Geef de variabelen een kleur!
- Geef de vergelijkingen een kleur!
- Vind oplossingen voor beide vergelijkingen \rightarrow nulclines
 - Check of variabele voorkomt in alle termen van vergelijking.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
 - Markeer alle oplossingen met kleur die hoort bij vergelijking!
 - Los deel tussen de haakjes op:
 - Maak de y -variabele vrij, indien mogelijk.
 - Indien niet mogelijk, dan $x = \dots \rightarrow$ verticale lijn.
 - **Alle** oplossingen vinden, en markeren in kleur!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - ① Onder breukstreep*? → Breukfunctie

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!
 - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes? → Lineair!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!
 - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes? → Lineair!
- Gaat hij omhoog of naar beneden?

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!
 - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes? → Lineair!
- Gaat hij omhoog of naar beneden?
- Breukfunctie? Asymptoten vinden!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!
 - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes? → Lineair!
- Gaat hij omhoog of naar beneden?
- Breukfunctie? Asymptoten vinden!
- Eventueel snijpunten bepalen.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!
 - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes? → Lineair!
- Gaat hij omhoog of naar beneden?
- Breukfunctie? Asymptoten vinden!
- Eventueel snijpunten bepalen.
- Functie tekenen, in bijbehorende kleur!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (2)

Stap 2: Nulclines tekenen

- Alle oplossingen gevonden, en gemarkeerd in kleur.
- Wat voor soort functie is het?
 - Herkennen en tekenen: breukfuncties, parabolen, 3^e graadsfuncties, rechte lijnen.
 - Kijk naar x -variabele!
 - 1 Onder breukstreep*? → Breukfunctie
 - 2 Hogere macht? → Parabool of 3^e graadsfunctie
 - 3 Wortels? → Verwissel de assen!
 - 4 Geen machten, exponenten, breuken, logaritmes? → Lineair!
- Gaat hij omhoog of naar beneden?
- Breukfunctie? Asymptoten vinden!
- Eventueel snijpunten bepalen.
- Functie tekenen, in bijbehorende kleur!
- Doe dit voor **alle** nulclines!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.
- Anders:
 - Grote waarde voor x of y of beiden.
 - Of punt op de x of y -as (let op nulclines).

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.
- Anders:
 - Grote waarde voor x of y of beiden.
 - Of punt op de x of y -as (let op nulclines).

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.
- Anders:
 - Grote waarde voor x of y of beiden.
 - Of punt op de x of y -as (let op nulclines).
- Horizontale en verticale vectoren tekenen, in juiste kleur!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.
- Anders:
 - Grote waarde voor x of y of beiden.
 - Of punt op de x of y -as (let op nulclines).
- Horizontale en verticale vectoren tekenen, in juiste kleur!
- Vectoren omklappen aan andere kant van nulcline met dezelfde kleur.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.
- Anders:
 - Grote waarde voor x of y of beiden.
 - Of punt op de x of y -as (let op nulclines).
- Horizontale en verticale vectoren tekenen, in juiste kleur!
- Vectoren omklappen aan andere kant van nulcline met dezelfde kleur.
- Controleer of vectorveld consistent is.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (3)

Stap 3: Vectorveld tekenen

- **Alle** nulclines getekend, in juiste kleur.
- Kies punt of gebied in faseruimte.
- Richting van vectoren bepalen, aan de hand van de **originele differentiaalvergelijkingen!**
- Let op wat de x en y -vergelijkingen zijn!
- Getallen als parameters? \rightarrow Punt invullen.
- Anders:
 - Grote waarde voor x of y of beiden.
 - Of punt op de x of y -as (let op nulclines).
- Horizontale en verticale vectoren tekenen, in juiste kleur!
- Vectoren omklappen aan andere kant van nulcline met dezelfde kleur.
- Controleer of vectorveld consistent is.
- Teken ook vectoren op nulclines (altijd horizontaal of verticaal).

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (4)

Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (4)

Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.
- Markeer **alle** snijpunten van twee **verschillende** nulclines.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (4)

Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.
- Markeer **alle** snijpunten van twee **verschillende** nulclines.
- Wijzen alle vectoren rondom snijpunt richting het evenwicht?
→ stabiel

Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.
- Markeer **alle** snijpunten van twee **verschillende** nulclines.
- Wijzen alle vectoren rondom snijpunt richting het evenwicht?
→ stabiel
- Wijzen vectoren in één of meer richtingen van het evenwicht af?
→ instabiel

Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.
- Markeer **alle** snijpunten van twee **verschillende** nulclines.
- Wijzen alle vectoren rondom snijpunt richting het evenwicht?
→ stabiel
- Wijzen vectoren in één of meer richtingen van het evenwicht af?
→ instabiel
- Soms kun je het niet zien (roterend vectorveld, horizontale of verticale nulcline).

Stap 4: Evenwichten en stabiliteit

- Faseportret (nulclines en vectorveld) getekend.
- Markeer **alle** snijpunten van twee **verschillende** nulclines.
- Wijzen alle vectoren rondom snijpunt richting het evenwicht?
→ stabiel
- Wijzen vectoren in één of meer richtingen van het evenwicht af?
→ instabiel
- Soms kun je het niet zien (roterend vectorveld, horizontale of verticale nulcline).
- In dat geval: grafische Jacobiaan bepalen → stabiel, instabiel, zadelpunt

Stap 5: Vraag beantwoorden

Let op:

- Wat is de betekenis van de variabelen?
- Hoe verschuiven nulclines als parameters veranderen?
- Wat gebeurt er dan met evenwichten en stabiliteit?
- Let vooral op *niet-triviale* evenwichten.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
 - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
 - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
 - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
- **Alle** oplossingen vinden (voor vergelijking A), en één voor één **invullen** in de andere vergelijking (B).

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
 - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
- **Alle** oplossingen vinden (voor vergelijking A), en één voor één **invullen** in de andere vergelijking (B).
- Als er in de oplossing uit vergelijking A nog variabelen staan, dan de bijbehorende oplossing van vergelijking B terug invullen in vergelijking A.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
 - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
- **Alle** oplossingen vinden (voor vergelijking A), en één voor één **invullen** in de andere vergelijking (B).
- Als er in de oplossing uit vergelijking A nog variabelen staan, dan de bijbehorende oplossing van vergelijking B terug invullen in vergelijking A.
- Twee bijbehorende oplossingen vormen samen de locatie van een evenwicht.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (5)

Stap 6: Locatie evenwichten

- Alleen indien nodig.
- Stel vergelijkingen $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ op nul.
- Los eerst de eenvoudigste op (vergelijking A).
- Makkelijkste variabele vrijmaken.
 - Check eerst of variabelen voorkomen in alle termen.
 - Zo ja, haal buiten haakjes $\rightarrow x = 0$ of $y = 0$ oplossing, meteen opschrijven!
- **Alle** oplossingen vinden (voor vergelijking A), en één voor één **invullen** in de andere vergelijking (B).
- Als er in de oplossing uit vergelijking A nog variabelen staan, dan de bijbehorende oplossing van vergelijking B terug invullen in vergelijking A.
- Twee bijbehorende oplossingen vormen samen de locatie van een evenwicht.
- Controleer aan de hand van je faseportret of je alle oplossingen

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (6)

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (6)

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (6)

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.
 - Beide differentiaalvergelijkingen afleiden naar de x - en naar de y -variabele.

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.
 - Beide differentiaalvergelijkingen afleiden naar de x - en naar de y -variabele.
- Voor ieder evenwicht, vul de x - en y -waardes in, in de algemene Jacobiaanse matrix.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (6)

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.
 - Beide differentiaalvergelijkingen afleiden naar de x - en naar de y -variabele.
- Voor ieder evenwicht, vul de x - en y -waardes in, in de algemene Jacobiaanse matrix.
 - Geeft de matrix voor het evenwicht.

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.
 - Beide differentiaalvergelijkingen afleiden naar de x - en naar de y -variabele.
- Voor ieder evenwicht, vul de x - en y -waardes in, in de algemene Jacobiaanse matrix.
 - Geeft de matrix voor het evenwicht.
 - Bepaal type evenwicht aan de hand van trace/determinant of eigenwaarden.

Aanvalsplan: ODE-modellen met 2 variabelen (6)

Stap 7: Type evenwichten

- Alleen indien nodig!
- Maak de algemene Jacobiaanse matrix van het systeem.
 - Beide differentiaalvergelijkingen afleiden naar de x - en naar de y -variabele.
- Voor ieder evenwicht, vul de x - en y -waardes in, in de algemene Jacobiaanse matrix.
 - Geeft de matrix voor het evenwicht.
 - Bepaal type evenwicht aan de hand van trace/determinant of eigenwaarden.
- Controleer of resultaat overeen komt met vectorveld!

Stap 8: Schets trajectories en/of timeplot

- Alleen indien nodig.
- **Trajectory:** Kies beginpunt(en), volg de pijlen richting attractor.
- **Timeplot:** volg trajectory, teken de waardes van de x - en y -variabelen apart over de tijd.

Verdere Planning

- Morgen: College prof. Paulien Hogeweg (ook tentamenstof!)

Verdere Planning

- Morgen: College prof. Paulien Hogeweg (ook tentamenstof!)
- Morgen en donderdag: Computerpracticum spatial models.
En afmaken opgaven, vragen stellen, oefententamens.

Verdere Planning

- Morgen: College prof. Paulien Hogeweg (ook tentamenstof!)
- Morgen en donderdag: Computerpracticum spatial models.
En afmaken opgaven, vragen stellen, oefententamens.
- Donderdag: Géén college, wel vragen-uren 13.00-15.00 en nabespreken GRIND. Niet verplicht.

Verdere Planning

- Morgen: College prof. Paulien Hogeweg (ook tentamenstof!)
- Morgen en donderdag: Computerpracticum spatial models. En afmaken opgaven, vragen stellen, oefententamens.
- Donderdag: Géén college, wel vragen-uren 13.00-15.00 en nabespreken GRIND. Niet verplicht.
- Dinsdag 18 maart: Tentamen, 13.30, Educatorium Gamma. Herkansingstoets Wiskunde aansluitend, om 16:30. Geen GR of telefoon, gewone rekenmachine mag wel.

Verdere Planning

- Morgen: College prof. Paulien Hogeweg (ook tentamenstof!)
- Morgen en donderdag: Computerpracticum spatial models. En afmaken opgaven, vragen stellen, oefententamens.
- Donderdag: Géén college, wel vragen-uren 13.00-15.00 en nabespreken GRIND. Niet verplicht.
- Dinsdag 18 maart: Tentamen, 13.30, Educatorium Gamma. Herkansingstoets Wiskunde aansluitend, om 16:30. Geen GR of telefoon, gewone rekenmachine mag wel.
- Donderdag 20 maart: Bioinformatica